MEM6810 工程系统建模与仿真

案例 软件

第三讲：典型系统建模与仿真 I

沈海辉

中美物流研究院
上海交通大学

shenhaihui.github.io/teaching/mem6810p
shenhaihui@sjtu.edu.cn

2022年春 (MEM非全日制)

SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY
董浩云航运与物流研究院
CY TUNG Institute of Maritime and Logistics
中美物流研究院（工程系统管理研究院）
Sino-US Global Logistics Institute (Institute of Industrial & System Engineering)

- 排队在现实世界中无处不在!
- 排队是现代生活中不可避免的一个现象.
  - 如, 在医院看病、在商店买东西、在银行取钱、通过线上客服中心进行咨询等.
  - 尽管人们都不喜欢排队, 但是大家都能认可排队机制的公平性.
- 实际上, 不仅仅只有人需要排队.
  - 例如, 邮件系统、打印机、生产线等内部也存在排队现象.
  - 生产系统在制造的过程中为原材料、半成品、成品维持队列, 即为库存.
  - 物流管理中的排队现象也很多, 如, 运输工具在仓储中心的卸货和装车过程, 电商按订单分拣出库的过程等.
- 物流管理中的排队现象也很多, 如
  - 运输工具在仓储中心的卸货和装车过程;
  - 电商按订单分拣出库的过程;
  - 顾客去快递自提点取货的过程, 等等.

图: 医院中的队列

图: 商店中的队列 (*from* The Sun)

图: 银行中的队列

图: 银行中的队列 (有时人无需真的站到队列中)


中国移动 4G
下午2:29
79%
在线客服
当前排队咨询人数为461，烦请耐心等待哦~
退押金
当前排队咨询人数为460，烦请耐心等待哦~
退押金
11-20 12:01
当前排队咨询人数为425，烦请耐心等待哦~
退押金
当前排队咨询人数为421，烦请耐心等待哦~

图: 在线服务中的队列

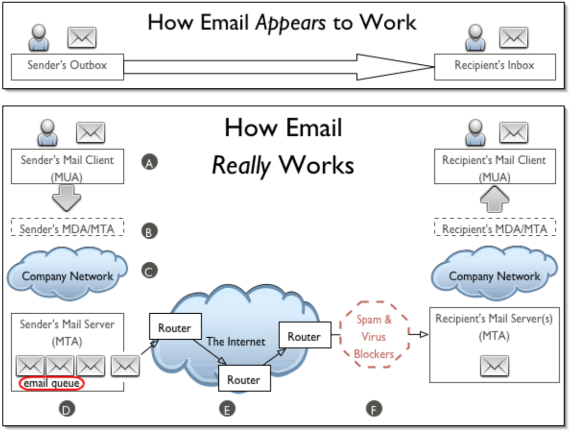


图: 邮件服务器中的队列 (*from* OASIS)

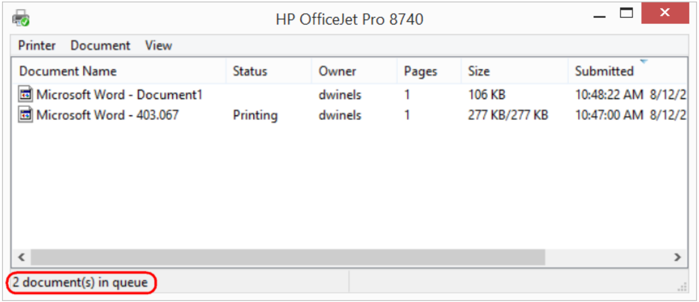

HP OfficeJet Pro 8740
Printer Document View
Document Name Status Owner Pages Size Submitted
Microsoft Word - Document1 dwinels 1 106 KB 10:48:22 AM 8/12/2
Microsoft Word - 403.067 Printing dwinels 1 277 KB/277 KB 10:47:00 AM 8/12/2
2 document(s) in queue

图: 打印机中的队列

图: 生产线上的队列 (库存) (*from* Estes)

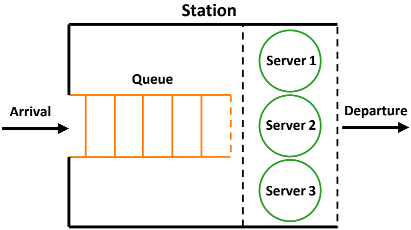
- 一般来说，一个排队系统包含一连串的 “**顾客**” (可以是人、货物或信息)，他们
  - 以某种方式到达;
  - 根据特定的规则在**队列**中等待;
  - 接受服务;
  - 最终离开.
- 许多现实世界中的系统都可被视为排队系统，例如，
  - 生活服务设施
  - 生产系统
  - 维修和保养设施
  - 通信与计算系统
  - 运输和物料管理系统
- 排队模型是对排队系统的数学化表示.

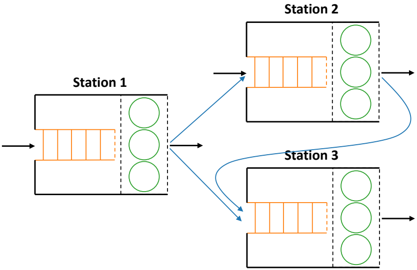
- 排队模型可以
  - 解析地求解, 当它比较简单时 (做了高度的简化处理);
  - 通过仿真进行分析, 当它比较复杂时 (更加贴近实际).
- 排队系统的仿真, 是典型的离散事件系统仿真.
- 无论采用哪种方式进行研究, 排队模型都是一个强大的工具, 可用以设计和评估排队系统的性能.
- 该目的可借由回答下列 (以及其它更多) 问题实现:
  1. 平均来说, 有多少顾客在队列 (或者系统) 中?
  2. 平均来说, 一个典型的顾客需要在队列 (或者系统) 中停留多长时间?
  3. 服务台的繁忙程度如何?

- 可解析求解的简单排队模型:
  - 以可忽略的时间和费用, 得到系统性能的粗略估计.
  - 更重要的是, 理解排队系统的动态特性和不同性能度量之间的关系.
  - 为验证仿真模型是否被正确地编程实现提供了一种手段.
- 通过仿真进行分析的复杂排队模型:
  - 使我们可以将实际系统任意精细的细节引入到模型中.
  - 估计任意感兴趣的性能度量, 并且具有高精度.

- 排队系统中最关键的两个要素是**顾客** (customer) 和**服务台** (server).
  - “顾客”一词可以指代任何到达系统并且需要服务的人或物.
  - “服务台”一词可以指代任何为顾客提供服务所需的资源.
- 相同的服务台及其前面的**队列** (queue) 构成**站点** (station), 它可能是排队系统的全部或者部分.
- **容量**是指一个站点所能容纳的顾客数量的最大值.
  - 队列中的数量 + 正在接受服务的数量.
  - 它可能是有限或无限的.

- 单站点排队系统.
  - 顾客在接受完服务之后直接离开.
  - 例如，顾客来到咖啡店买完咖啡后便离开.
- 多站点排队系统 (排队网络).
  - 顾客可能从一个站点去另一个站点 (接受不同的服务).
  - 例如，病人在医院中要去不同的科室排队并接受服务.





- **达到过程**模型描述了顾客是以何种方式到来.
  - 他们可能是在**预先指定的**时刻或**随机的**时刻到来.
  - 对于随机到达的情况, **到达时间间隔** (interarrival times) 通常可由概率分布来刻画.
  - 该概率分布可能依赖于当下的时间点.
  - 顾客可能一个一个到达, 或者以批次形式到达 (确定性的或随机性的批量大小).
  - 顾客可能有多种类别.
- 当顾客达到站点之后:
  - 如果站点容量已满:
    - 外部到达的客户只能马上离开 (lost);
    - 内部到达的客户可能在他上一个站点中等待.
  - 如果站点容量未满, 则进入站点:
    - 如果有空闲的服务台, 立刻接受服务;
    - 如果有所有服务台都处于繁忙, 则进入队列等待.

- 排队规则: 哪个顾客先服务.
  - 先进先出 (first-in-first-out, FIFO), 或称为先到先服务 (first-come-first-served, FCFS).
  - 后进先出 (last-in-first-out, LIFO), 或称为后到先服务 (last-come-first-served, LCFS).
  - 最短服务时间优先.
  - 根据优先权 (当有多个类别的顾客的时候).

- 队列行为: 在队列中的顾客的行为.
  - 畏缩 (balk): 当看到队列太长的时候选择直接离开.
  - 放弃 (renege): 在队列中等了一段时间, 感觉队伍移动得太慢而选择离开.

- **服务时长**是指一个服务台中的服务所持续的时长.
  - **确定的**或**随机的**时长.
  - 可能依赖于顾客的类别.
  - 可能依赖于当下的时间点或当前队列的长度.

- 现有的排队理论通常考虑满足下列假设的排队模型，以便解析地求解出一些**稳态**性能指标:
  1. 只有一类顾客.
  2. 随机的到达 (即，随机的到达时间间隔)，并且到达时间间隔独立同分布.
  3. 不是批次到达 (即，批量大小为 1).
  4. 在一个站点中只有一条队列.
  5. 先到先服务.
  6. 没有畏缩 (balk) 和放弃 (renege) 现象.
  7. 随机的服务时长 (不与其他任何事物有关)，并且独立同分布.
- 即便如此，分析求解排队模型也不是一件容易的事情.
- 而更加复杂的排队模型，往往只能诉诸于仿真.

- 由 Kendall (1953) 提出的经典的符号体系: $X/Y/s/K$.
  - X 表示到达时间间隔的分布.
    - M: 无记忆, 即, 达时间间隔服从指数分布;
    - G: 一般的分布;
    - D: 确定性的分布.
  - Y 表示服务时长的分布.
    - 和达时间间隔的分布的记号一样.
  - s 表示并行的服务台的数量.
    - 是一个有限值.
    - 当服务台的数量无穷多时, s 被替换为 ∞.
  - K 表示站点的容量.
    - 是一个有限值.
    - 当站点的容量为无限时, K 被替换为 ∞, 或直接省略.
- 例子: $M/M/1$, $M/G/1$, $M/M/s/K$.

- 令 $L(t)$ 为在时刻 t 时站点内的顾客数量.

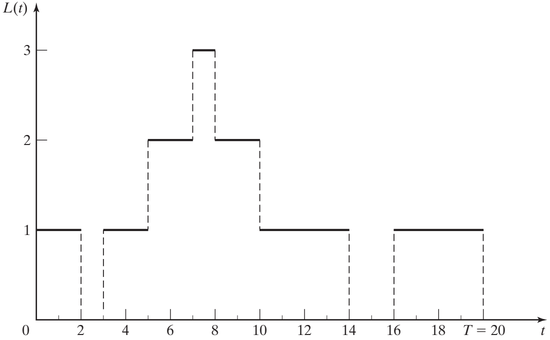


图: $L(t)$ 的图解 (*from* *Banks et al. (2010)*)

- 令 $\widehat{L}(T)$ 为截止到时刻 T 为止在站点内的 (时间加权的) 平均顾客数量:

$$\widehat{L}(T) := \frac{1}{T}\int_0^T L(t)\mathrm{d}t.$$

- $\widehat{L}(T)$ 还可以用另一种方式来计算.
- 令 T_n 为在 $[0, T]$ 时间段中站点内恰好有 n 名顾客的总时长.

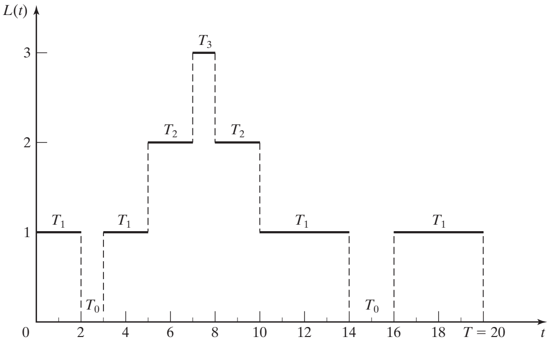


图: $L(t)$ 的图解 (*from* *Banks et al. (2010)*)

- $\widehat{L}(T) := \frac{1}{T}\int_0^T L(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\sum_{n=0}^{\infty} nT_n = \sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{T_n}{T}\right).$

- 假设在 $[0,T]$ 时间段中，一共有 $N(T)$ 名顾客进入站点，并且用 $W_1, W_2, \ldots, W_{N(T)}$ 表示截止到时刻 T 为止每位顾客在站点中的逗留时长.†
- 令 $\widehat{W}(T)$ 为截止到时刻 T 为止在站点内的平均逗留时长:

$$\widehat{W}(T) := \frac{1}{N(T)} \sum_{i=1}^{N(T)} W_i.$$

- 用类似的方式，我们可以定义
  - $\widehat{L}_Q(T)$ – 截止到时刻 T 为止在队列中的平均顾客数量.
  - $\widehat{W}_Q(T)$ – 截止到时刻 T 为止在队列中的平均等待时长.

† 逗留时长包含等待时长和接受服务时长；超出时刻 T 的部分不计入.

- 现在我们来考虑一些**长期的** (long-run) 性能度量.
  - L – 在站点内的长期的平均顾客数量:
$$L := \lim_{T\to\infty} \widehat{L}(T).$$
  - W – 在站点内的长期的平均逗留时长:
$$W := \lim_{T\to\infty} \widehat{W}(T).$$
  - L_Q – 在队列中的长期的平均顾客数量:
$$L_Q := \lim_{T\to\infty} \widehat{L}_Q(T).$$
  - W_Q – 在队列中的长期的平均等待时长:
$$W_Q := \lim_{T\to\infty} \widehat{W}_Q(T).$$
- L, W, L_Q 和 W_Q 也是对站点和队列的**期望**性能度量.
- 问题: 什么时候 L, W, L_Q 和 W_Q 存在 (且 $< \infty$), 即, 排队系统是稳定的?

- 对于一个任意的排队系统 $X/Y/s/K$:
  - 令 λ 记为到达速率, 即,
  $$\mathbb{E}[\text{到达时间间隔}] = \frac{1}{\lambda}.$$
  - 令 μ 记为单个服务台的服务速率, 即,
  $$\mathbb{E}[\text{服务时长}] = \frac{1}{\mu}.$$

定理 (稳定性条件)

对于一个 $X/Y/s/\infty$ 排队系统 (即, 无限容量), 若它的到达速率为 λ, 服务速率为 μ, 那么该系统是稳定的如果
$$\lambda < s\mu.$$
另一方面, 一个 $X/Y/s/K$ 排队系统 (即, 有限容量) 一定是稳定的.

- 守恒方程 (Little's Law) 是排队论中最一般最通用的定律之一.
  - 以 John D.C. Little 命名, 他最早在 1961 年首次证明了该定律的一个版本.
  - 当被巧妙地运用时, 守恒方程可以使一些推导变得十分简化.

定理 (守恒方程 – 经验版本)

定义 $\widehat{\lambda} := N(T)/T$, 即为观测到的进入速率. 那么,

$$\widehat{L}(T) = \widehat{\lambda}\widehat{W}(T), \quad \widehat{L}_Q(T) = \widehat{\lambda}\widehat{W}_Q(T).$$

- 验证守恒方程*

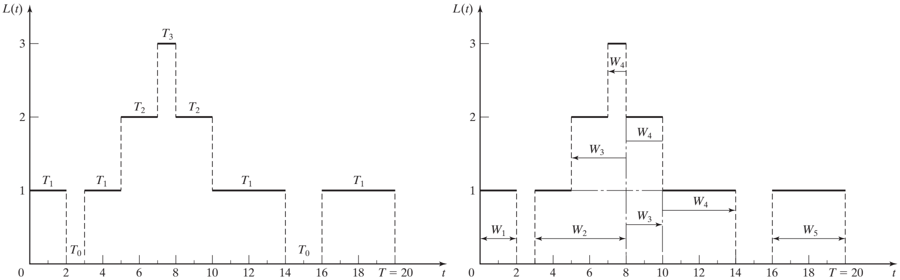


图: $L(t)$ 和 W_i 的图解 (*from* *Banks et al. (2010)*)

$$\widehat{\lambda} = N(T)/T = 5/20 = 0.25.$$

$$\widehat{W}(T) = \frac{1}{N(T)} \sum_{i=1}^{N(T)} W_i = \frac{1}{5}(2+5+5+7+4) = \frac{23}{5} = 4.6.$$

$$\widehat{L}(T) = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{\infty} nT_n = \frac{1}{20}(0\times 3 + 1\times 12 + 2\times 4 + 3\times 1) = \frac{23}{20} = 1.15.$$

所以, $\widehat{\lambda}\widehat{W}(T) = 0.25 \times 4.6 = 1.15 = \widehat{L}(T)$. **(为什么它们总是相等?)**

- 验证守恒方程*

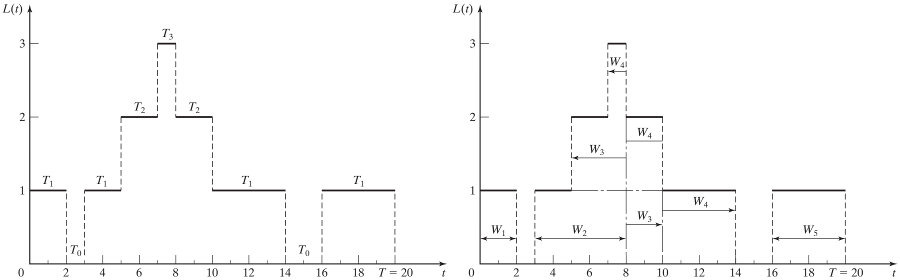


图: $L(t)$ 和 W_i 的图解 (*from* *Banks et al. (2010)*)

- **为什么它们总是相等?**

$\widehat{L}(T) = \frac{1}{T}\sum_{n=0}^{\infty} nT_n = \frac{1}{T} \times$ 面积.

$\widehat{\lambda}\widehat{W}(T) = \frac{N(T)}{T}\frac{1}{N(T)}\sum_{i=1}^{N(T)} W_i = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{N(T)} W_i = \frac{1}{T} \times$ 面积.

所以, $\widehat{L}(T) = \widehat{\lambda}\widehat{W}(T)$ 总是成立.

- **相同的论证可以得到 $\widehat{L}_Q(T) = \widehat{\lambda}\widehat{W}_Q(T)$.**

定理 (守恒方程 – 极限/期望版本)

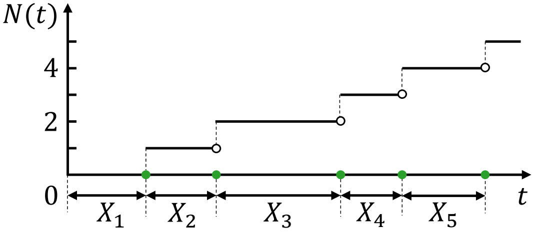
对于稳定的排队系统，令 λ^* 表示到达速率或进入速率，那么，

$$L = \lambda^* W, \quad L_Q = \lambda^* W_Q.$$

注意: 如果 λ^* 是到达速率，那么时间均值 (W, W_Q) 是基于所有 (进入或未进入站点的) 顾客而言；如果 λ^* 是进入速率，那么时间均值只是基于所有进入站点的顾客而言.

- 附注:
  - 对于未进入站点的顾客 (由于有限容量)，他在系统或者队列中花费的时间为 0.
  - 一旦我们知道了 L, W, L_Q 和 W_Q 中的任意一个，便可借助守恒方程来计算其余的量.

- 一个随机过程 $\{N(t),\ t \geq 0\}$ 被称为是**一个计数过程**, 如果 $N(t)$ 表示截止到时刻 t 为止随机到达 (或称发生的"事件") 的总数量.



- 以 $\{X_n,\ n \geq 1\}$ 记到达时间间隔 (interarrival times):
  - X_1 指第一个到达的时刻 (即, 他与 0 时刻的间隔);
  - 对于 $n \geq 2$, X_n 指第 $(n-1)$ 个和第 n 个到达之间的时间间隔.

- **定义 1: 一个计数过程** $\{N(t),\ t \geq 0\}$ 被称为**泊松过程**, 速率参数为 $\lambda > 0$, 如果它满足下列条件:
  1. $N(0) = 0$;
  2. 过程具有**独立**且**平稳**的增量;
  3. 给定 t, 随机变量$N(t)$ 服从参数为 λt 的泊松分布, 即, $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$:

$$\mathbb{P}(N(t) = n) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

- 独立的增量: 在不相交的时间区间中到达的数量是独立的.
- 平稳的增量: 在任一时间区间中到达的数量的分布只依赖于时间区间的长度, 即, 对 $s < t$, $N(t) - N(s)$ 的分布只依赖于 $t - s$.

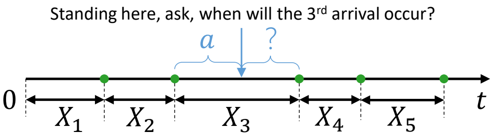
- **定义 2: 一个计数过程** $\{N(t),\ t \geq 0\}$ 被称为**泊松过程**, 速率参数为 $\lambda > 0$, 如果它满足下列条件:
  1. $N(0) = 0$;
  2. 过程具有独立且平稳的增量;
  3. $\mathbb{P}(N(t) = 1) = \lambda t + o(t)$;
  4. $\mathbb{P}(N(t) \geq 2) = o(t)$.

- **定义 3: 一个计数过程** $\{N(t),\ t \geq 0\}$ 被称为**泊松过程**, 速率参数为 $\lambda > 0$, 如果它满足下列条件:
  1. $N(0) = 0$;
  2. $\{X_n,\ n \geq 1\}$ 是均值为 $1/\lambda$ 的独立同分布的指数随机变量, 即, $X_n \sim \text{exponential}(\lambda)$, $n = 1, 2, \ldots$.

- 可以证明, **定义 1**, **定义 2** 和 **定义 3** 是等价的!

- 在 Excel 中验证泊松分布和指数分布之间的关系.

- 问: 下一个什么时候到来?



$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_3 - a > x | X_3 > a) &= \frac{\mathbb{P}(X_3 - a > x, X_3 > a)}{\mathbb{P}(X_3 > a)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X_3 > a + x, X_3 > a)}{\mathbb{P}(X_3 > a)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X_3 > a + x)}{\mathbb{P}(X_3 > a)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(a+x)}}{e^{-\lambda a}} = e^{-\lambda x}. \quad \text{(与 } a \text{ 无关!)}\end{aligned}$$

- 泊松过程具有**无记忆性**, 这是因为到达时间间隔服从指数分布, 而指数分布具有无记忆性.

- 真实数据: 以色列某电话客服中心的来电记录.
- 我们为上午 10:30 至 10:35 时段内的来电时间间隔拟合分布 (1991.11.01 – 1991.12.31, 共 43 个工作日)

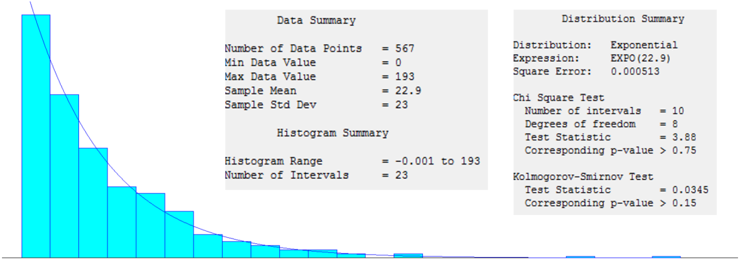


图: 数据的经验 pdf vs 指数分布 pdf (by Input Analyzer in Arena)

- 假设某车站发车间隔平均为 60 分钟, 乘客到达的时间在时间轴上呈均匀分布. 问, 乘客的平均等车时长是多少?
  - 如发车间隔为确定的 60 分钟, 易知平均等车时长为 30 分钟.
  - 如发车间隔是随机变量 X, $\mathbb{E}[X] = 60$ 分钟, 则平均等车时长 > 30 分钟.
  - 如发车间隔服从指数分布, 即, 汽车到来服从泊松过程, 则平均等车时长为 60 分钟!

- $M/M/1$ 排队系统
  - 到达时间间隔是独立同分布的随机变量，服从 exponential(λ) 分布，即，顾客达到过程是泊松过程，速率参数为 λ.
  - 服务时长是独立同分布的随机变量，服从 exponential(μ) 分布.
  - 只有一个服务台，且顾客以先到先服务的方式接受服务.
  - 容量是无限的，即，假设队列长度 (等候的区域) 可以是无限的.
  - 该排队系统是稳定的，当且仅当 $\lambda < \mu$.
  - 由于无限容量，到达速率 = 进入速率.
- 对于 $M/M/1$ 排队系统，我们可以相对容易地求出 L, W, L_Q 和 W_Q.

- 令 $\rho := \lambda/\mu$.
- $L = \frac{\rho}{1-\rho}$.
- $W = L/\lambda = \frac{1}{\mu-\lambda}$.
- $L_Q = \frac{\rho^2}{1-\rho}$.
- $W_Q = L_Q/\lambda = \frac{\rho}{\mu-\lambda}$.
- 或者, $W_Q = W - \mathbb{E}[\text{服务时长}] = \frac{1}{\mu-\lambda} - \frac{1}{\mu} = \frac{\rho}{\mu-\lambda}$.
- 由于无限容量, 到达速率 $=$ 进入速率, 因此时间均值 (W, W_Q) 是基于所有顾客而言.
- 服务台利用率 $= \rho$, $\mathbb{P}[\text{服务台空闲}] = 1 - \rho$.
- 当 $\rho \to 1$, L, W, L_Q 和 W_Q 都趋向于 ∞.

- $M/M/s$ 排队系统
  - 到达时间间隔是独立同分布的随机变量，服从 exponential(λ) 分布，即，顾客达到过程是泊松过程，速率参数为 λ.
  - 服务时长是独立同分布的随机变量，服从 exponential(μ) 分布.
  - 有 s 个服务台.
  - 顾客形成一条队列，以先到先服务的方式，在最先空出来的服务台接受服务 (若有多个同时空闲则等概率随机选择).
  - 容量是无限的，即，假设队列长度 (等候的区域) 可以是无限的.
  - 该排队系统是稳定的，当且仅当 $\lambda < s\mu$.
  - 由于无限容量，到达速率 = 进入速率.
- $M/M/s$ 排队系统是 $M/M/1$ 排队系统的一般化版本；如令 $s = 1$，则退化成为 $M/M/1$.

- 令 $\rho := \lambda/(s\mu)$, $P_s = \left[\sum_{i=0}^{s} \frac{1}{i!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i + \frac{s^s}{s!} \frac{\rho^{s+1}}{1-\rho}\right]^{-1} \frac{s^s}{s!} \rho^s$.
- $L_Q = \frac{P_s \rho}{(1-\rho)^2}$.
- $W_Q = L_Q/\lambda = \frac{P_s}{s\mu(1-\rho)^2}$.
- $W = W_Q + \mathbb{E}[\text{服务时长}] = \frac{P_s}{s\mu(1-\rho)^2} + \frac{1}{\mu}$.
- $L = \lambda W = \lambda(W_Q + \frac{1}{\mu}) = L_Q + \frac{\lambda}{\mu} = \frac{P_s \rho}{(1-\rho)^2} + \frac{\lambda}{\mu}$.
- 由于无限容量, 到达速率 $=$ 进入速率, 因此时间均值 (W, W_Q) 是基于所有顾客而言.
- 服务台利用率 $= \rho$,

  $\mathbb{P}[\text{服务台全空闲}] = \left[\sum_{i=0}^{s} \frac{1}{i!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i + \frac{s^s}{s!} \frac{\rho^{s+1}}{1-\rho}\right]^{-1}$.
- 当 $\rho \to 1$, L, W, L_Q 和 W_Q 都趋向于 ∞.

- 通过令 $s \to \infty$, 可以得到 $M/M/s$ 排队系统的极限情况, $M/M/\infty$ 排队系统.
- $M/M/\infty$ 排队系统总是稳定的! (服务台利用率总是 0.)
- 所有的性能度量都可以通过令 $M/M/s$ 的结果中的 $s \to \infty$ 得到.†
- $L = \frac{\lambda}{\mu}$.
- $W = L/\lambda = \frac{1}{\mu}$.
- $L_Q = 0$, $W_Q = 0$.

† 需要用到泰勒级数: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

- $M/M/1/K$ **排队系统**
  - 到达时间间隔是独立同分布的随机变量, 服从 exponential(λ) 分布, 即, 顾客达到过程是泊松过程, 速率参数为 λ.
  - 服务时长是独立同分布的随机变量, 服从 exponential(μ) 分布.
  - 只有一个服务台, 且顾客以先到先服务的方式接受服务.
  - 容量为 K, $K \geq 1$, 即, 队列长度 + 服务台中的顾客数量 $\leq K$.
  - 如果一个从外部到达的顾客发现该站点是满的 (里面已经包含了 K 名顾客), 他会立即离开 (lost).
  - 进入速率 (记为 λ_e) 小于到达速率 (记为 λ).
  - 该排队系统永远是稳定的 (由于有限容量).

- 令 $\rho := \lambda/\mu$.
- $L = \begin{cases} \frac{\rho}{1-\rho}\frac{1-(K+1)\rho^K+K\rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}}, & \text{如果 } \rho \neq 1, \\ \frac{K}{2}, & \text{如果 } \rho = 1. \end{cases}$
- $\mathbb{P}[\text{站点是满的}] = P_K = \begin{cases} \frac{(1-\rho)\rho^K}{1-\rho^{K+1}}, & \text{如果 } \rho \neq 1, \\ \frac{1}{K+1}, & \text{如果 } \rho = 1. \end{cases}$
- 进入速率 $\lambda_e = \lambda(1 - P_K)$.
- 服务台利用率 $= \lambda_e/\mu = \rho(1 - P_K)$.
- 当 $\rho \to \infty$ 时, $L \to K$, $1 - P_K \to 0$, $\rho(1 - P_K) \to 1$.

- 对于进入站点的顾客
  - $W = L/\lambda_e = \frac{L}{\lambda(1-P_K)}$.
  - $W_Q = W - \frac{1}{\mu} = \frac{L}{\lambda(1-P_K)} - \frac{1}{\mu}$.
- 对于全体顾客 (那些未进入站点的顾客，他们的逗留时间和等待时间都为 0)
  - $W' = (1-P_K)W + P_K \times 0 = \frac{L}{\lambda}$.
  - $W'_Q = (1-P_K)W_Q + P_K \times 0 = \frac{L}{\lambda} - \frac{1-P_K}{\mu}$.
- $L_Q = \lambda_e W_Q = \lambda W'_Q = L - \rho(1-P_K)$.
- 当 $\rho \to \infty$ 时，$L_Q \to K-1$.
  - 如果 μ 固定而 $\lambda \to \infty$:
    $\lambda(1-P_K) \to \mu$, $W \to \frac{K}{\mu}$, $W_Q \to \frac{K-1}{\mu}$, $W' \to 0$, $W'_Q \to 0$.
  - 如果 λ 固定而 $\mu \to 0$:
    $\frac{1}{\mu}(1-P_K) \to \frac{1}{\lambda}$, $W \to \infty$, $W_Q \to \infty$, $W' \to \frac{K}{\lambda}$, $W'_Q \to \frac{K-1}{\lambda}$.

- $M/G/1$ 排队系统
  - 服务时长是独立同分布的随机变量, 服从一个任意的分布 (均值 $\frac{1}{\mu}$, 方差 σ^2).
  - 其他都和 $M/M/1$ 排队系统相同.

- 令 $m^2 := \left(\frac{1}{\mu}\right)^2 + \sigma^2$, 以及 $\rho := \lambda/\mu < 1$.
  - 服务台利用率 $= \rho$, $\mathbb{P}[\text{服务台空闲}] = 1 - \rho$.
  - $W_Q = \frac{\lambda m^2}{2(1-\rho)}$.
  - $L_Q = \lambda W_Q = \frac{\lambda^2 m^2}{2(1-\rho)}$.
  - $W = W_Q + \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda m^2}{2(1-\rho)} + \frac{1}{\mu}$.
  - $L = \lambda W = L_Q + \lambda/\mu = \frac{\lambda^2 m^2}{2(1-\rho)} + \rho$.

- 对于 $M/G/\infty$ 排队系统, 那些性能度量与 $M/M/\infty$ 排队系统中的性能度量是相同的.

- 在 Excel 中实现 $M/M/1$ 排队系统的仿真, $\lambda = 0.6$, $\mu = 1$.
  - 根据排队论, 已知 $L = 1.5$, $L_Q = 0.9$, $W = 2.5$, $W_Q = 1.5$, 服务台利用率 $= \rho = 0.6$.
- 任意 $G/G/1$ 排队系统的仿真可用相同的方法实现 (此时已经无法解析求解).
- 在 Excel 中实现 $M/M/2$ 排队系统的仿真, $\lambda = 0.6$, $\mu = 0.5$.
  - 根据排队论, 已知 $L = 1.875$, $L_Q = 0.675$, $W = 3.125$, $W_Q = 1.125$, 服务台利用率 $= \rho = 0.6$.
- 任意 $G/G/2$ 排队系统的仿真可用相同的方法实现 (此时已经无法解析求解).

- 单泊位港口仿真实例
  - 某港口现有 1 个泊位，可供船舶停靠，进行装船、卸货作业.
  - 船舶入港后，如泊位是空闲的，可立即使用；否则需要遵循先到先服务原则在港口区排队等候.
  - 邮轮到达时间间隔的分布，邮轮类型的分布及其所需作业时长如下列表格所示：

到达时间间隔/天	概率
1	0.05
2	0.15
3	0.35
4	0.25
5	0.20

邮轮类型	所需时长/天	概率
巨型	4	0.40
中型	3	0.35
小型	2	0.25

  - 计算该港口长时间连续运行下的性能度量：L, L_Q, W, W_Q 和泊位利用率.
  - 提示：可以建模为 $G/G/1$ 进行仿真.

- **双泊位港口仿真实例**
  - 由于发现该港口现有的服务水平太低，现考虑对港口进行改造，新增 1 个泊位.
  - 由于新增泊位的技术水平较高，所需作业时长较原泊位短，如下表所示：

邮轮类型	原泊位所需时长/天	新泊位所需时长/天
巨型	4	3
中型	3	2
小型	2	1

  - 计算改造后各性能度量的变化情况.
  - 提示：可以建模为 $G/G/2$ (两个服务台速率不同) 进行仿真.

1 排队系统建模与仿真
- 引言
- 术语
- 符号
- 守恒方程
- 泊松到达过程
- 等待时间“悖论”
- $M/M/1$
- $M/M/s$
- $M/M/\infty$
- $M/M/1/K$
- $M/G/1$
- Excel 仿真实践

2 库存系统建模与仿真
- 引言
- 基本概念
- 恒定库存量模型
- 经济订货批量 (EOQ) 模型
- 单周期随机库存模型 (报童模型)

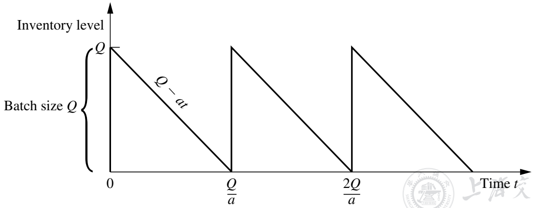
- 库存 (inventory) 是一个组织中存储的为满足日后所需的物品或资源.
  - 制造库存主要分为原材料库存、零部件库存、在制品库存、成品库存.
  - 在服务行业，库存通常指将来售出的有形商品和提供服务所需的供给.
- 持有库存的主要目的是
  - 利用订货的规模经济效应;
  - 应对供应方或需求方的不确定性.
- 库存系统是一套政策和控制机制，它监控库存水平，决定需要维持何种水平，何时需要补货，以及订单量多大.
- 库存模型是对库存系统的数学化表示，可以帮助企业提高库存决策科学性和准确性.

- 需求
  - 离散 vs 连续
  - 确定 vs 随机
- 补充 (向其他厂家购买或者自己生产)
  - 订货提前期 (lead time): 确定 vs 随机
  - 订货批量 (batch size)
  - 到货方式: 一次性到达 vs 连续到达
- 费用
  - 订货/生产费用
    1. 订购/装配费用 (固定, 与数量无关)
    2. 商品成本 (与数量成正比, 有时也有数量折扣等因素要考虑)
  - 缺货费用 (shortage cost)
    - 失去销售机会造成的损失, 停工待料造成的损失, 信誉的损失, 相关的赔偿等
    - 若不允许缺货, 则将缺货费用作无穷大处理
  - 库存费用 (holding cost, or carrying cost)

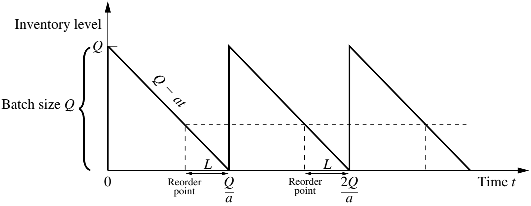
上海交通大学 SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

- 若一个仓库只为一个客户供货, 该客户的需求是随机的, 服从 $[1, 10]$ 上的离散均匀分布. 若要保证至少在 80% 的情况中订单需求可以满足, 最低的库存水平是多少? **答案: 8**
- 如果新增一个客户, 该客户的需求也服从 $[1, 10]$ 上的离散均匀分布, 且两个客户的需求是独立的. 若仍要保证至少在 80% 的情况中订单需求可以满足, 最低的库存水平是多少? **答案: 16? 15 就已经足够!**
- 理论计算 vs 仿真分析.
- 若要保证至少在 20% 的情况中订单需求可以满足呢?
- 如果该商品的数量为连续的, 需求服从 $\mathrm{uniform}(1, 10)$ 呢?

- 经济订货批量 (EOQ) 模型是库存理论中最基本的模型，最早由 Ford W. Harris 于 1913 年提出.
- 基础 EOQ 模型 (不允许缺货，补货一次到达)
  - 需求是连续且均匀的，单位时间需求量为 a;
  - 每次订货批量 Q 是恒定的，订货提前期 $L = 0$ 并且是一次性到达 (即，瞬时完成);
  - 固定订购费用为 C_0; 单位物资成本为 c; 单位时间单位商品的库存费用为 h; 不允许缺货 (缺货费用无穷大).
- 最优订货批量为 $Q^* = \sqrt{\frac{2aC_0}{h}}$; 订货周期也随之确定，为 $t^* = \frac{Q^*}{a} = \sqrt{\frac{2C_0}{ah}}$.



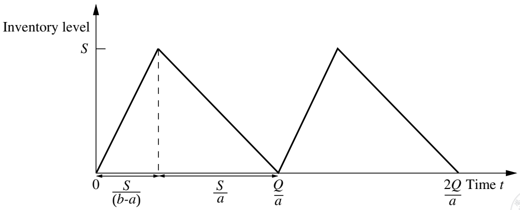
- 基础 EOQ 模型 (不允许缺货, 补货一次到达)
  - 订货提前期 L 固定但 $L > 0$, 并且是一次性到达;
  - 其余都不变.
- 最优订货批量不变, 只需将订货点 (reorder point) 往前平移时间 L 即可.



- 只要订货提前期 L 是确定的, 它便不会对分析造成影响 (只需先按 $L = 0$ 计算, 最终将订货点前移即可).

- EOQ 模型 (不允许缺货, 补货**连续到达**)
  - 需求是连续且均匀的, 单位时间需求量为 a;
  - 每次订货批量 Q 是恒定的, 订货提前期 L 是确定的, 但**货物是连续到达的, 单位时间到达量为 b, $b > a$**.
  - 固定订购费用为 C_0; 单位物资成本为 c; 单位时间单位商品的库存费用为 h; 不允许缺货 (缺货费用无穷大).

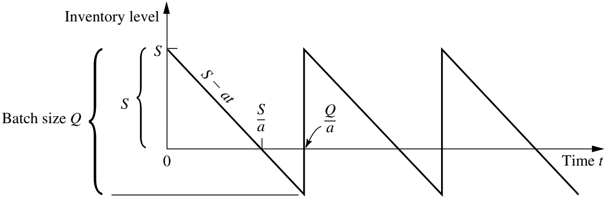
- 最优订货批量为 $Q^* = \sqrt{\frac{2aC_0}{h}}\sqrt{\frac{b}{b-a}}$; 订货周期也随之确定, 为 $t^* = \frac{Q^*}{a} = \sqrt{\frac{2C_0}{ah}}\sqrt{\frac{b}{b-a}}$. 最优库存峰值为 $S^* = \sqrt{\frac{2aC_0}{h}}\sqrt{\frac{b-a}{b}}$.



- 有些情况下, 允许一定数量的缺货可以减少库存费用, 降低总成本.
- 缺货时, 顾客的行为有两种: 流失 (去别家买) 或等待.
  - 如果顾客会因为缺货而流失, 在前两个模型其他假设不变的情况下, 可知, 即使无需因为缺货而赔偿顾客, 商家也不会允许缺货发生 (为了最大化利润), 因此最优解与前面保持一致.
  - 如果顾客愿意等待, 而商家需要为此付出一定的费用, 那么最优解会出现变化.

- EOQ 模型 (**允许缺货**, 补货一次到达)
  - 需求是连续且均匀的, 单位时间需求量为 a;
  - 每次订货批量 Q 是恒定的, 订货提前期 L 是确定的, 并且是一次性到达;
  - 固定订购费用为 C_0; 单位物资成本为 c; 单位时间单位商品的库存费用为 h;
  - **允许缺货:** 顾客一直等待直到有货 (backorder), 但是每单位时间单位商品的缺货费用为 p; 当有货时, 他们瞬时被满足.

- EOQ 模型 (**允许缺货**, 补货一次到达)

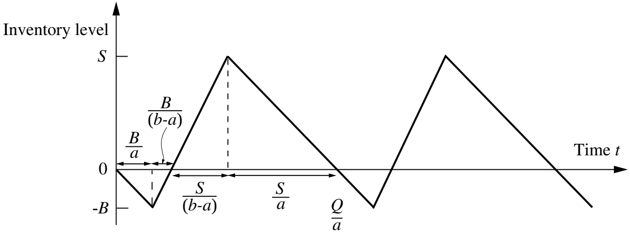


- 最优订货批量为 $Q^* = \sqrt{\frac{2aC_0}{h}}\sqrt{\frac{p+h}{p}}$; 订货周期也随之确定, 为 $t^* = \frac{Q^*}{a} = \sqrt{\frac{2C_0}{ah}}\sqrt{\frac{p+h}{p}}$.

- 最优库存峰值为 $S^* = \sqrt{\frac{2aC_0}{h}}\sqrt{\frac{p}{p+h}}$, 最大缺货量为 $Q^* - S^* = \sqrt{\frac{2aC_0}{p}}\sqrt{\frac{h}{p+h}}$.

- EOQ 模型 (**允许缺货**, 补货**连续到达**)
  - 需求是连续且均匀的, 单位时间需求量为 a;
  - 每次订货批量 Q 是恒定的, 订货提前期 L 是确定的, 但**货物是连续到达的, 单位时间到达量为 b, $b > a$**.
  - 固定订购费用为 C_0; 单位物资成本为 c; 单位时间单位商品的库存费用为 h;
  - **允许缺货:** 顾客一直等待直到有货 (backorder), 但是每单位时间单位商品的缺货费用为 p; 当有货时, 他们瞬时被满足.

- EOQ 模型 (允许缺货, 补货连续到达)



- 最优订货批量为 $Q^* = \sqrt{\frac{2aC_0}{h}}\sqrt{\frac{p+h}{p}}\sqrt{\frac{b}{b-a}}$; 订货周期也随之确定, 为 $t^* = \frac{Q^*}{a} = \sqrt{\frac{2C_0}{ah}}\sqrt{\frac{p+h}{p}}\sqrt{\frac{b}{b-a}}$.
- 最优库存峰值为 $S^* = \sqrt{\frac{2aC_0}{h}}\sqrt{\frac{p}{p+h}}\sqrt{\frac{b-a}{b}}$, 最大缺货量为 $B^* = Q^* - S^* = \sqrt{\frac{2aC_0}{p}}\sqrt{\frac{h}{p+h}}\sqrt{\frac{b}{b-a}}$.

- **数量折扣**: 供应商有时为了鼓励大批量订货, 会实行价格优惠, 订货批量越大, 单价越便宜.
- EOQ 模型 (不允许缺货, 补货一次到达, 有**数量折扣**)
  - 需求是连续且均匀的, 单位时间需求量为 a;
  - 每次订货批量 Q 是恒定的, 订货提前期 L 是确定的, 并且是一次性到达;
  - 固定订购费用为 C_0; 单位时间单位商品的库存费用为 h; 不允许缺货 (缺货费用无穷大).
  - **数量折扣:** 单位物资成本为 $c(Q)$, 与订货批量 Q 有关.

$$c(Q) = \begin{cases} c_1, & 0 \le Q < Q_1, \\ c_2, & Q_1 \le Q < Q_2, \\ \cdots & \cdots \\ c_n, & Q_{n-1} \le Q < Q_n, \end{cases}$$

其中, $0 < Q_1 < Q_2 < \cdots < Q_n$, $c_1 > c_2 > \cdots > c_n$.

- 最优订货批量 Q^* 可通过下列方式计算.
  1. 令 $\tilde{Q} = \sqrt{\frac{2aC_0}{h}}$ (此为基础模型中的最优订货批量);
  2. 计算该订货批量下的平均总费用: 若 $Q_{i-1} \leq \tilde{Q} < Q_i$, 则平均总费用为
  $$\tilde{C} = \frac{h\tilde{Q}}{2} + \frac{aC_0}{\tilde{Q}} + ac_i.$$
  3. 计算其他订货批量下的平均总费用:
  $$C^{(j)} = \frac{hQ_j}{2} + \frac{aC_0}{Q_j} + ac_{j+1}, \quad j = i, i+1, \ldots, n-1.$$
  4. $\{\tilde{C}, C^{(i)}, C^{(i+1)}, C^{(n-1)}\}$ 中最小者, 所对应的订货批量, 即为最优订货批量 Q^*.

- 例子: 某车间每月需要消耗零件 30000 个 (a), 固定订购费用为 500 元 (C_0), 每月每件库存费用为 0.2 元 (h). 订货单价 $c(Q)$ 与订货批量 Q 的关系如下:

$$c(Q) = \begin{cases} 1\text{元}/\text{个}, & 0 \le Q < 10000, \\ 0.98\text{元}/\text{个}, & 10000 \le Q < 30000, \\ 0.94\text{元}/\text{个}, & 30000 \le Q < 50000, \\ 0.90\text{元}/\text{个}, & 50000 \le Q < \infty. \end{cases}$$

求最优订货批量 Q^*.

- 单周期库存模型: 在某一时期内订货只有一次, 到此时期结束时要么所有的产品全卖光, 要么就折本销售剩余产品.
  - 典型例子: 报纸、时装、易腐烂产品等.
- 报童模型 Arrow et al. (1951)
  - 需求是一个随机变量 X, 其累积分布函数 (CDF) 为 $F(x)$ (注: X 可以是离散随机变量, 也可以是连续随机变量);
  - 在销售期开始之前确定订货批量 Q, 并于销售期开始之前送达;
  - 固定订购费用 C_0 可假设为 0 (若 $C_0 > 0$, 不会改变最优解, 除非 C_0 过大而使最优解变为 "不订货");
  - 商品的库存费用为一个**恒定的值** (与时间和数量无关), 可假设为 0 (若大于 0, 不会改变最优解, 除非过大而使最优解变为 "不订货");
  - 单位商品成本为 c; 单位商品的售出价为 p, $p > c$, 商品售完即止 (后续的顾客全流失); 若销售期结束时仍有商品剩余, 则以单价 q, $q < c$, 一次性处理 (q 称为残值).

- 简单分析
  - 随机需求为 X, 订货量为 Q, 因此剩余量为 $\max\{Q-X,0\}$, 销售量为 $Q-\max\{Q-X,0\}$.
  - 令 $a := p-c > 0$ 表示每售出单位商品的利润, 令 $b := c-q > 0$ 表示每剩余单位商品的亏损.
  - 销售期结束后的总利润为

$$\begin{aligned}\pi(Q) &= a[Q-\max\{Q-X,0\}] - b\max\{Q-X,0\}\\ &= aQ-(a+b)\max\{Q-X,0\}\\ &= (p-c)Q-(p-q)\max\{Q-X,0\}.\end{aligned}$$

  - 总利润的期望值为

$$\mathbb{E}[\pi(Q)] = (p-c)Q-(p-q)\,\mathbb{E}[\max\{Q-X,0\}].$$

  - 需要寻找 Q 使 $\mathbb{E}[\pi(Q)]$ 最大.
- 最优订货批量 Q^* 为

$$Q^* = F^{-1}\left(\frac{p-c}{p-q}\right) = \min\left\{x \geq 0:\ F(x) \geq \frac{p-c}{p-q}\right\}.$$

- 如果在做订货决策之时, 已有初始库存 I.
- 若 $I \geq Q^*$, 则肯定选择“不订货”.
- 若 $I < Q^*$, 令 q^* 满足 $q^* \leq Q^*$ 且 $\mathbb{E}[\pi(q^*)] = \mathbb{E}[\pi(Q^*)] - C_0$:
  - 如果 $I \geq q^*$, 选择“不补货”;
  - 如果 $I < q^*$, 选择补货至 Q^*.
- 可知当 $C_0 = 0$ 时, $q^* = Q^*$, 此时, 若 $I < Q^*$, 则必选择补货至 Q^*.
- 这便是经典的 (s, S) 订货策略: 当库存水平低于 s, 补货至 S; 当库存水平高于或等于 s, 不补货.
- 在报童模型中, $S = Q^*$, $s = q^*$, 并且可以证明 (s, S) 订货策略是最优的策略.

- 实例分析
  - 某报刊亭全年出售一种报纸，每份售价 1.0 元，每份进价 0.4 元，当天剩余报纸残值为每份 0 元.
  - 根据以往经验，每天报纸的需求量的分布如下表所示:

需求/份	300	400	500	600	700	800
概率	0.05	0.10	0.25	0.30	0.20	0.10

  - 每天的最优订货批量为多少?
  - 通过 Excel 进行理论计算 vs 仿真分析.
- 如果保亭与印刷厂达成协议，当天剩余报纸可以每份 0.2 元卖回给印刷厂，该协议的价值有多大?